

Varianta 81

SUBIECTUL I

- a) $S = 16$
- b) $AB = \sqrt{2}$.
- c) $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.
- d) $a = 1$ și $b = -5$.
- e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.
- f) $a = \frac{23}{41}$ și $b = \frac{2}{41}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Valoarea determinantului este: -8 .
- b) $A^{2007} = O_2$.
- c) $x = 1$.
- d) $x = 0$.
- e) $p = \frac{1}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = 5 - 2 \cos x$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + 2 \cos 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{7n^2 + n - 1} = \frac{5}{7}$.
- e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 9} dx = -\frac{1}{6} \ln 2$.

SUBIECTUL III

- a) $f_0(x) = (x+1)^{30} - 1 = x = g(x), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow g = f_0 \Rightarrow g \in G$.

- b)** $(f_n \circ f_p)(x) = f_n((x+1)^{3^p} - 1) = ((x+1)^{3^p} - 1 + 1)^{3^n} - 1 = (x+1)^{3^{n+p}} - 1 = f_{n+p}(x)$ De unde $f_n \circ f_p = f_{n+p}$, $\forall n, p \in \mathbf{Z}$.
- c)** $(f_n \circ f_{-n})(x) \stackrel{b)}{=} f_{n-n}(x) = f_0(x) \stackrel{a)}{=} g(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$.
- d)** Observăm că $f_k(-1) = -1, \forall k \in \mathbf{N}$ $f_1(-1) + f_2(-1) + \dots + f_{2005}(-1) = -2005$.
- e)** $f_1(x) = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow f_1'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_1$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- f)** Folosind **a)**, **b)** și **c)** se verifică axiomele grupului.
- g)** Notăm $(x+1)^3 = t$ și ecuația devine: $t^3 + t - 2 = 0$ cu singura soluție reală $t = 1 \Rightarrow (x+1)^3 = 1 \Rightarrow x = 0$.

SUBIECTUL IV

- a)** $g'(x) = h'(x) + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = h(x)$.
- $f'(x) = g'(x) + \left(\frac{x^4}{4!}\right)' = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = g(x), \forall x \in \mathbf{R}$
- b)** $h(x) = \frac{1 + (1+x)^2}{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- c)** $g'(x) \stackrel{a)}{=} h(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow g$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- d)** $\int_0^1 h(x) dx = g(x) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}$.
- e)** $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) = -\infty$.
- f)** Deoarece funcția g este continuă $\stackrel{e)}{\Rightarrow} \text{Im } f = \mathbf{R} \Rightarrow$ ecuația are cel puțin o soluție. Deoarece funcția g este strict crescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow$ ecuația are cel mult o soluție. Atunci ecuația are soluție unică.
- g)** $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24}{24} = \frac{(x^2 + 2x)^2 + 2(2x+3)^2 + 6}{24} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.